الجمهورية العربية السورية ١٠٠

جامعة البعث

كلية العلوم

قسم رياضيات



مبادئ الإحصاء والاحتمال

(نظري)

المحاضرة (3)

السنة الأولى _ الفصل الثاني

المحاضرة النظرية الثالثة

سنتنقل الآن إلى النوع الثالث من التوزيعات المنفصلة:

3- التوزيع الهندسي:

حيث أن التوزيع على الشكل الآتي $F(x) = p^x (1-p)$ حيث أن x تأخذ القيم الآتية $x = 0, 1, \ldots$ وهو متحول منفصل وقابل للعد

إثبات أن التوزيع قانون احتمالي

* حتى يكون التوزيع قانون احتمالي يجب أن يكون $\sum_{x=0}^{\infty} F(x) = 1$

$$\sum_{x=0}^{\infty} F(x) = 1$$

مجموع لأنه منفصل

$$\Rightarrow \sum_{x=0}^{\infty} p^x (1-p)$$

نلاحظ أن $(1-p)$ لا تتعلق بـ x إذاً يمكن إخراجها خارج المجموع

$$\Rightarrow (1-p) \sum_{x=0}^{\infty} p^x$$

p هو تابع احتمال بين $[0,1]$

حيث p^x هي سلسلة هندسية متقاربة

* مجموع السلسلة الهندسية

$$\sum_{x=0}^{\infty} p^x = \frac{1}{1-p}$$

$$\Rightarrow (1-p) \frac{1}{1-p} = 1$$

لذلك سمي التوزيع الهندسي

<< إلى الآن اكتمل التعريف احتمالياً >>

« التوقع الهندسي » :

ايجاد التوقع الهندسي حسب تعريف التوقع

$$E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} x \; F(x)$$

ولدينا $F(x) = p^x (1-p)$

$$\Rightarrow E(x) = \sum_{x=0}^{\infty} x \, p^x (1-p) \quad ; \quad 0<p<1$$

$$= (1-p) \sum_{x=0}^{\infty} x \, p^x$$

نعلم أن $p^x = p \cdot p^{x-1}$ حيث « ضرب القوى نجمع الأسس »

$$= (1-p) \, p \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot p^{x-1}$$

ونعلم أن $(x^n)' = n x^{n-1}$ ⇐ $\left(\sum_{x=0}^{\infty} p^x\right)' = x \cdot p^{x-1}$ بتعويض

$$= (1-p) \; p \left(\sum_{x=0}^{\infty} p^x\right)' = (1-p) \, p \left(\frac{1}{1-p}\right)'$$

الاشتقاق بالنسبة لـ p

$$= p \, (1-p) \frac{1}{(1-p)^2} = \frac{p}{1-p}$$

التوزيعات المستمرة

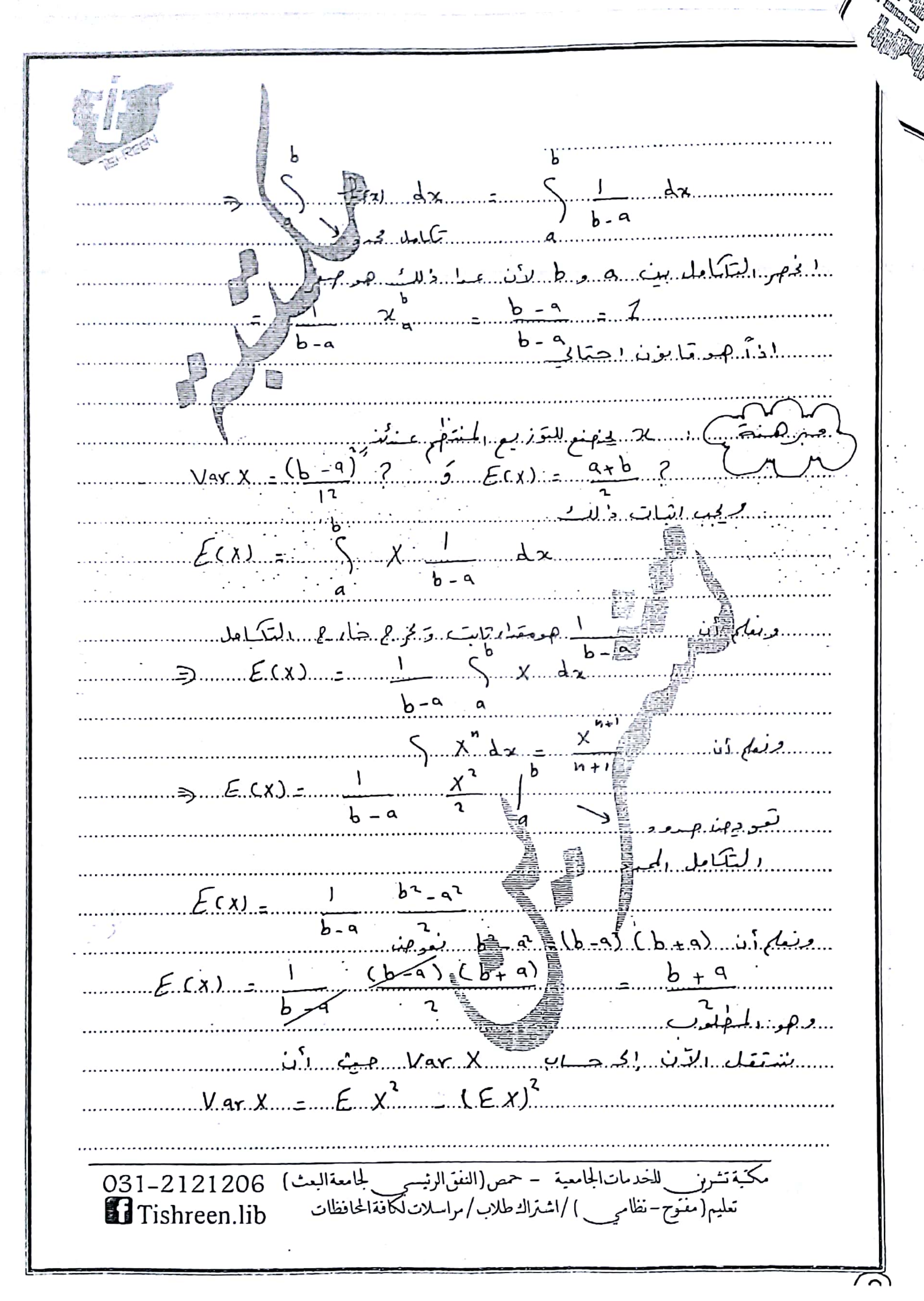
1) التوزيع المنتظم : يكتب بالشكل $x = [a, b]$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & ; \; x=[a,b] \\ 0 & ; \; \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

يجب اثبات أن $f(x)$ هو قانون احتمالي

حتى يكون $f(x)$ قانون احتمالي يجب أن يتحقق

$\int f(x) = 1$ لأنه متصل



$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \frac{1}{b-a}\,dx$$

تكامل محدود

انحصر التكامل بين a و b لأن عدا ذلك هو صفر

$$= \frac{1}{b-a}\, x \Big|_a^b = \frac{b-a}{b-a} = 1$$

اذاً هو قانون احتمالي

مبرهنة: x يخضع للتوزيع المنتظم عندئذٍ

$Var\,X = \frac{(b-a)^2}{12}$? و $E(X) = \frac{a+b}{2}$?

ويجب اثبات ذلك

$$E(X) = \int_a^b x \frac{1}{b-a}\,dx$$

ونعلم أن $\frac{1}{b-a}$ هو مقدار ثابت و نخرجه خارج التكامل

$$\Rightarrow E(X) = \frac{1}{b-a}\int_a^b x\,dx$$

ونعلم أن $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$

$$\Rightarrow E(X) = \frac{1}{b-a}\,\frac{x^2}{2}\Big|_a^b$$

→ نعوض هنا حدود التكامل المحدد

$$E(X) = \frac{1}{b-a}\,\frac{b^2-a^2}{2}$$

ونعلم أن $b^2 - a^2 = (b-a)(b+a)$ نعوض

$$E(X) = \frac{1}{b-a}\,\frac{(b-a)(b+a)}{2} = \frac{b+a}{2}$$

وهو المطلوب

ننتقل الآن إلى حساب $Var\,X$ حيث أن

$$Var\,X = E\,X^2 - (E\,X)^2$$

حيث أن

$$E x^2 = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}\, dx$$

$$= \frac{1}{3(b-a)}\, x^3 \Big|_a^b$$

نعوض حدود التكامل بدل x

$$= \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} = \frac{(b-a)(b^2 + ab + a^2)}{3(b-a)}$$

متطابقة تكعيبية $b^3 - a^3 = (b-a)(b^2 + ab + a^2)$

$$= \frac{b^2 + ab + a^2}{3}$$

$$\Rightarrow Var\, x = E x^2 - (E x)^2$$

$$= \frac{b^2 + ab + a^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

نعلم أن $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$$= \frac{b^2 + ab + a^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{b^2 + ab + a^2}{3}_{(4)} - \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4}_{(3)}$$

$$= \frac{4b^2 + 4ab + 4a^2 - 3a^2 - 6ab - 3b^2}{12} = \frac{b^2 - 2ab + a^2}{12}$$

ونعلم أن $(b-a)^2 = b^2 - 2ab + a^2$

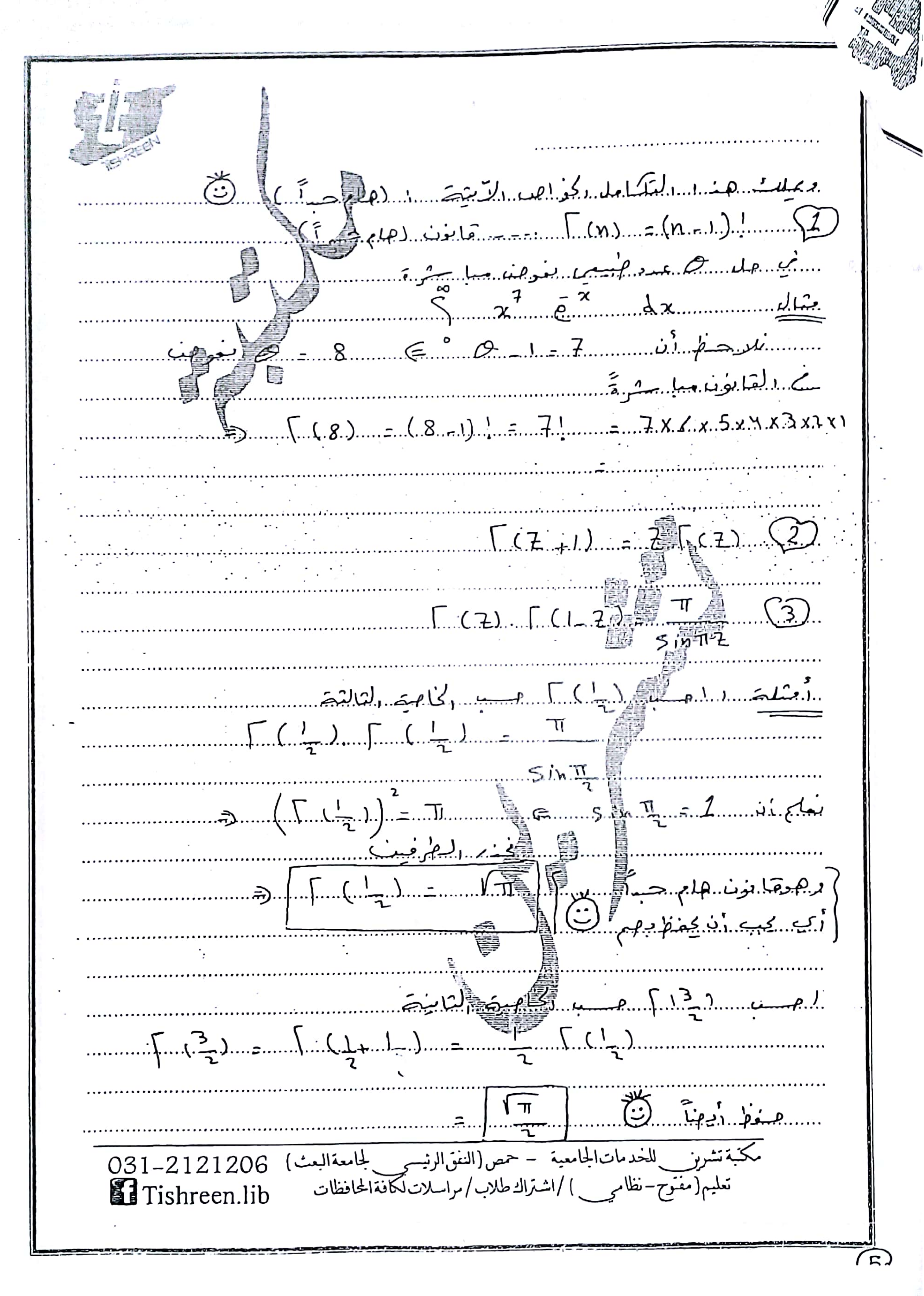
$$= \frac{(b-a)^2}{12}$$

وهو المطلوب

((الدالة غاما (التكامل الوسيطي أو المعتل)):

تعرف بالشكل الآتي: $\Gamma(\alpha) = \int_{x=0}^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx$ غاما

ويسمى التكامل المعتل لأن حدود التكامل ∞ أو أي حد منها يسمى بالتكامل المعتل.



وسنعطي هذا التكامل الخواص الآتية: (هام جداً)

1) $\Gamma(n) = (n-1)!$ ..... قانون (هام جداً)

نرى حل α عدد طبيعي نعوضه مباشرة

مثال $\int_0^{\infty} x^7 e^{-x} dx$

نلاحظ أن $7 = \alpha - 1 \Leftarrow \alpha = 8$ نعوض

من القانون مباشرة

$\Rightarrow \Gamma(8) = (8-1)! = 7! = 7\times6\times5\times4\times3\times2\times1$

2) $\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$

3) $\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = \dfrac{\pi}{\sin \pi z}$

أمثلة: ا احسب $\Gamma(\frac{1}{2})$ حسب الخاصية الثالثة

$\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(\frac{1}{2}) = \dfrac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}}$

نعلم أن $\sin\frac{\pi}{2} = 1 \Leftarrow \Rightarrow \left(\Gamma(\frac{1}{2})\right)^2 = \pi$

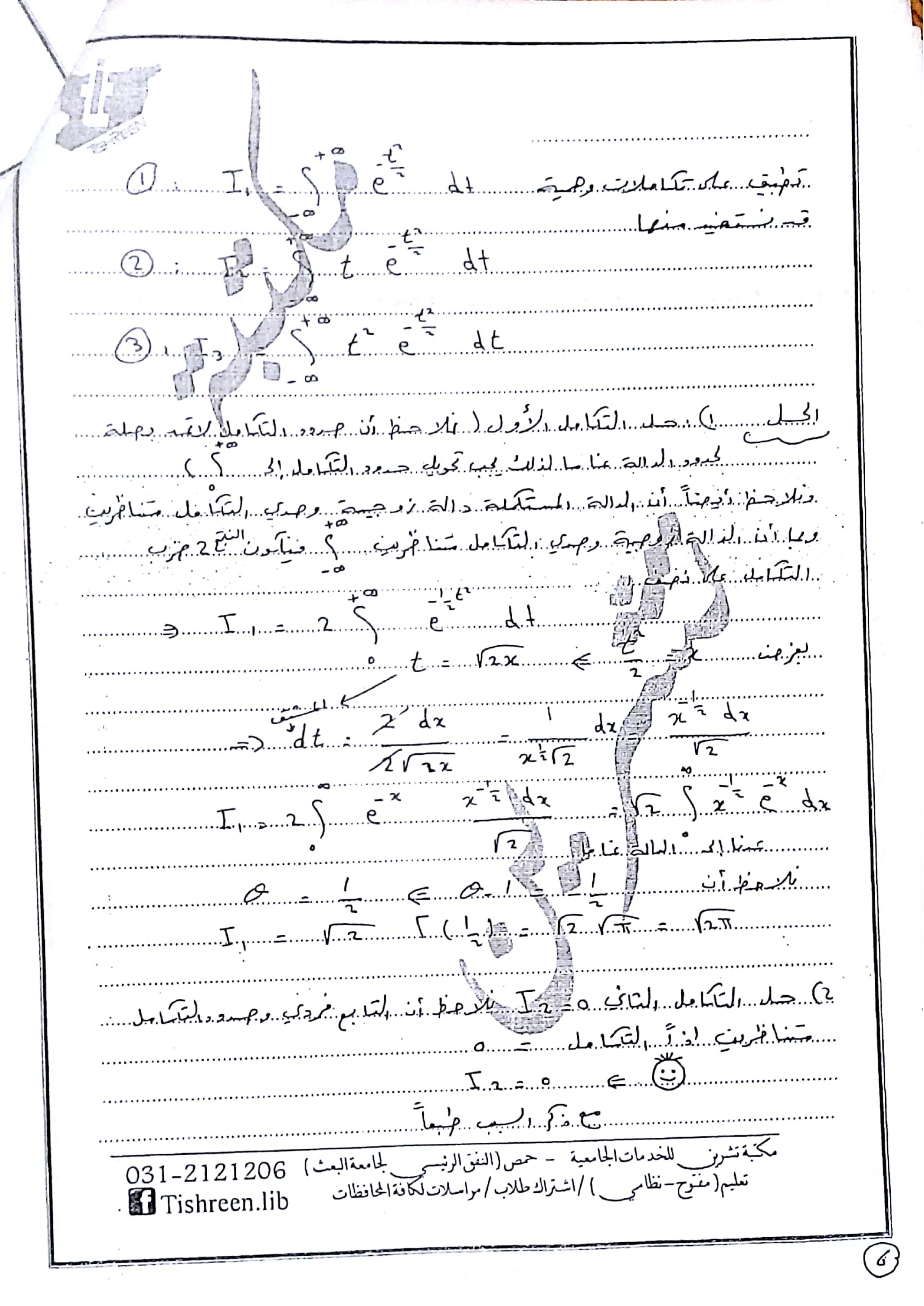
نجذر الطرفين

$\Rightarrow \boxed{\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}}$ وهو قانون هام جداً أي يجب أن يحفظ دوماً

ا احسب $\Gamma(\frac{3}{2})$ حسب الخاصية الثانية

$\Gamma(\frac{3}{2}) = \Gamma(\frac{1}{2}+1) = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})$

$= \boxed{\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}}$ مضبوط أيضاً



تمرين على تكاملات وهمية قد تستفيد منها

① : $I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt$

② : $I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} t \, e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt$

③ : $I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \, e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt$

الحل: 1) حل التكامل الأول (نلاحظ أن حدود التكامل لا تقع بجملة لحدود الدالة غاما لذلك يجب تحويل حدود التكامل إلى $\int_0^{+\infty}$)

ونلاحظ أيضاً أن الدالة المستكملة دالة زوجية وحدي التكامل متناظرين

وبما أن الدالة زوجية وحدي التكامل متناظرين $\int_{-\infty}^{+\infty}$ فيكون الناتج 2 ضرب التكامل على نصفه

$$\Rightarrow I_1 = 2\int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} \, dt$$

نعوض $\frac{t^2}{2} = x \Rightarrow t = \sqrt{2x}$

بالاشتقاق

$$\Rightarrow dt = \frac{2\,dx}{2\sqrt{2x}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}\sqrt{2}}\,dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}}\,dx}{\sqrt{2}}$$

$$I_1 = 2\int_0^{\infty} e^{-x}\,\frac{x^{-\frac{1}{2}}\,dx}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\int_0^{\infty} x^{-\frac{1}{2}} e^{-x}\,dx$$

عدنا إلى الدالة غاما

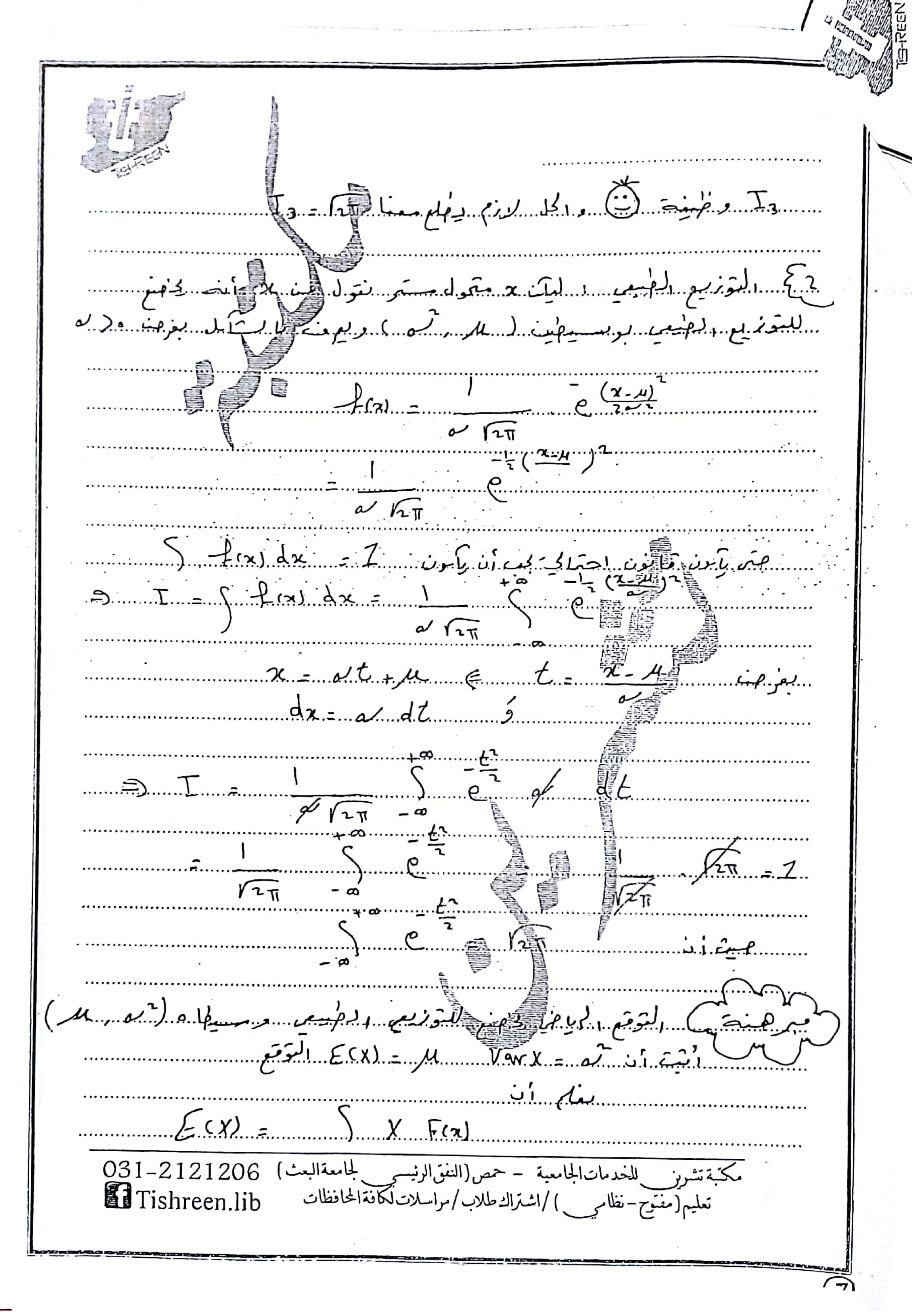
نلاحظ أن $a - 1 = -\frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$

$$I_1 = \sqrt{2}\;\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2}\,\sqrt{\pi} = \sqrt{2\pi}$$

2) حل التكامل الثاني $I_2 = 0$ نلاحظ أن التابع فردي وحدود التكامل متناظرين إذاً التكامل $= 0$

$\Rightarrow I_2 = 0$ ☺

مع ذكر السبب طبعاً



I_3 وظيفة 🙂 والحل اللازم يعطيهم معنا $I_3 = \sqrt{2\pi}$

٤-٢ التوزيع الطبيعي: ليكن x متحول مستمر نقول عنه أنه يخضع للتوزيع الطبيعي بوسيطين (μ, σ^2) ويعرف كالتالي بفرض د.ه

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

حتى يكون قانون احتمالي يجب أن يكون $\int f(x)\,dx = 1$

$$\Rightarrow I = \int f(x)\,dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

بفرض $t = \frac{x-\mu}{\sigma} \Leftarrow x = \sigma t + \mu$

و $dx = \sigma\, dt$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \sigma\, dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{2\pi} = 1$$

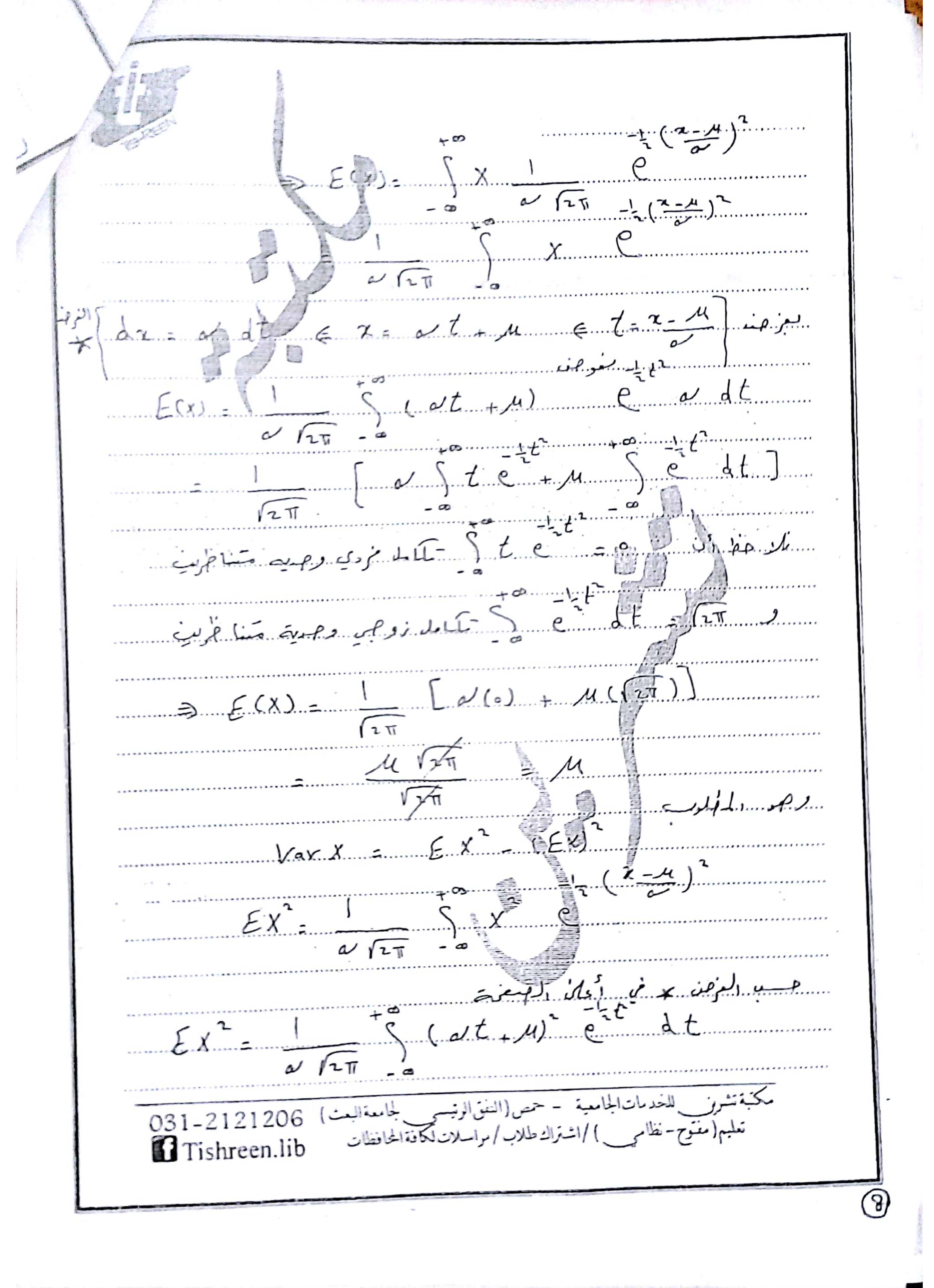
حيث أن $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} = \sqrt{2\pi}$

مبرهنة: التوقع الرياضي لخاضع للتوزيع الطبيعي وسيطاه (μ, σ^2)

أثبت أن $Var\,X = \sigma^2$ ، التوقع $E(X) = \mu$

نعلم أن

$$E(X) = \int X\, F(x)$$



$$\Rightarrow E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x \, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

نعوض $\left[\, t = \frac{x-\mu}{\sigma} \Leftarrow x = \sigma t + \mu \Leftarrow dx = \sigma \, dt \,\right]$ * التعويض

نعوض $e^{-\frac{1}{2}t^2}$

$$E(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma t + \mu) \, e^{-\frac{1}{2}t^2} \, \sigma \, dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\sigma \int_{-\infty}^{+\infty} t \, e^{-\frac{1}{2}t^2} + \mu \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} \, dt \right]$$

نلاحظ أن $\int_{-\infty}^{+\infty} t \, e^{-\frac{1}{2}t^2} = 0$ تكامل فردي وحديه متناظرين

و $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} \, dt = \sqrt{2\pi}$ تكامل زوجي وحدية متناظرين

$$\Rightarrow E(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\sigma(0) + \mu(\sqrt{2\pi}) \right]$$

$$= \frac{\mu\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\pi}} = \mu$$

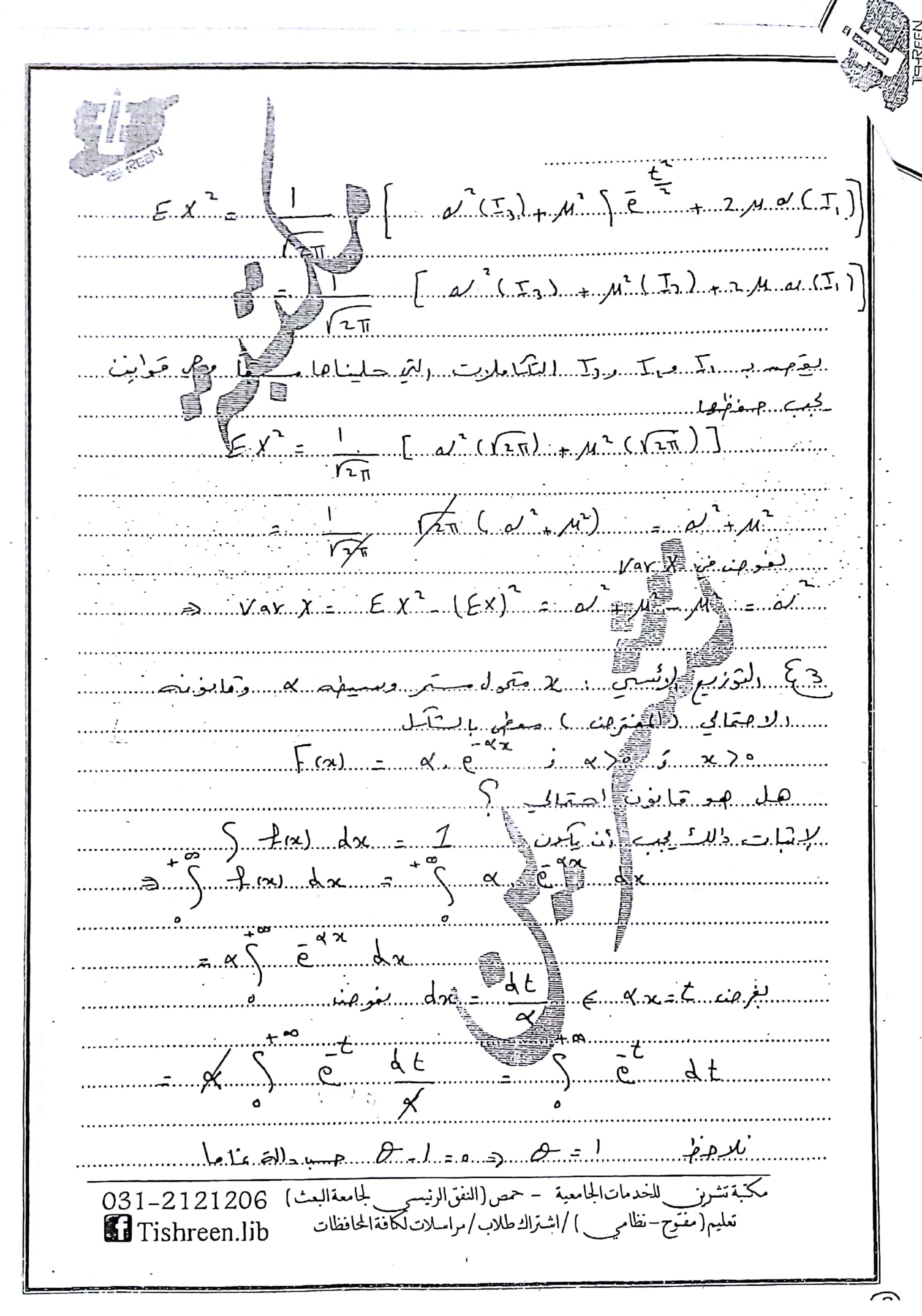
ولحساب التباين

$$Var\, X = EX^2 - (EX)^2$$

$$EX^2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

حسب التعويض * في أعلى الصفحة

$$EX^2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma t + \mu)^2 \, e^{-\frac{1}{2}t^2} \, dt$$



$$EX^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\sigma^2 (I_3) + \mu^2 \int e^{-\frac{t^2}{2}} + 2\mu\sigma (I_1) \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\sigma^2 (I_3) + \mu^2 (I_2) + 2\mu\sigma (I_1) \right]$$

نعوض بـ I_1 و I_2 و I_3 التكاملات التي حللناها مسبقاً وهي قوانين يجب حفظها

$$EX^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\sigma^2 (\sqrt{2\pi}) + \mu^2 (\sqrt{2\pi}) \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2\pi} (\sigma^2 + \mu^2) = \sigma^2 + \mu^2$$

نعوض في $Var\,X$

$$\Rightarrow Var\,X = EX^2 - (EX)^2 = \sigma^2 + \mu^2 - \mu^2 = \sigma^2$$

3) التوزيع الأسي: x متحول مستمر وسيطه α وقانونه الاحتمالي (المفترض) معطى بالشكل

$$f(x) = \alpha\, e^{-\alpha x} \quad ; \quad \alpha > 0 \quad ; \quad x > 0$$

هل هو قانون احتمالي؟

لإثبات ذلك يجب أن يكون $\int f(x)\,dx = 1$

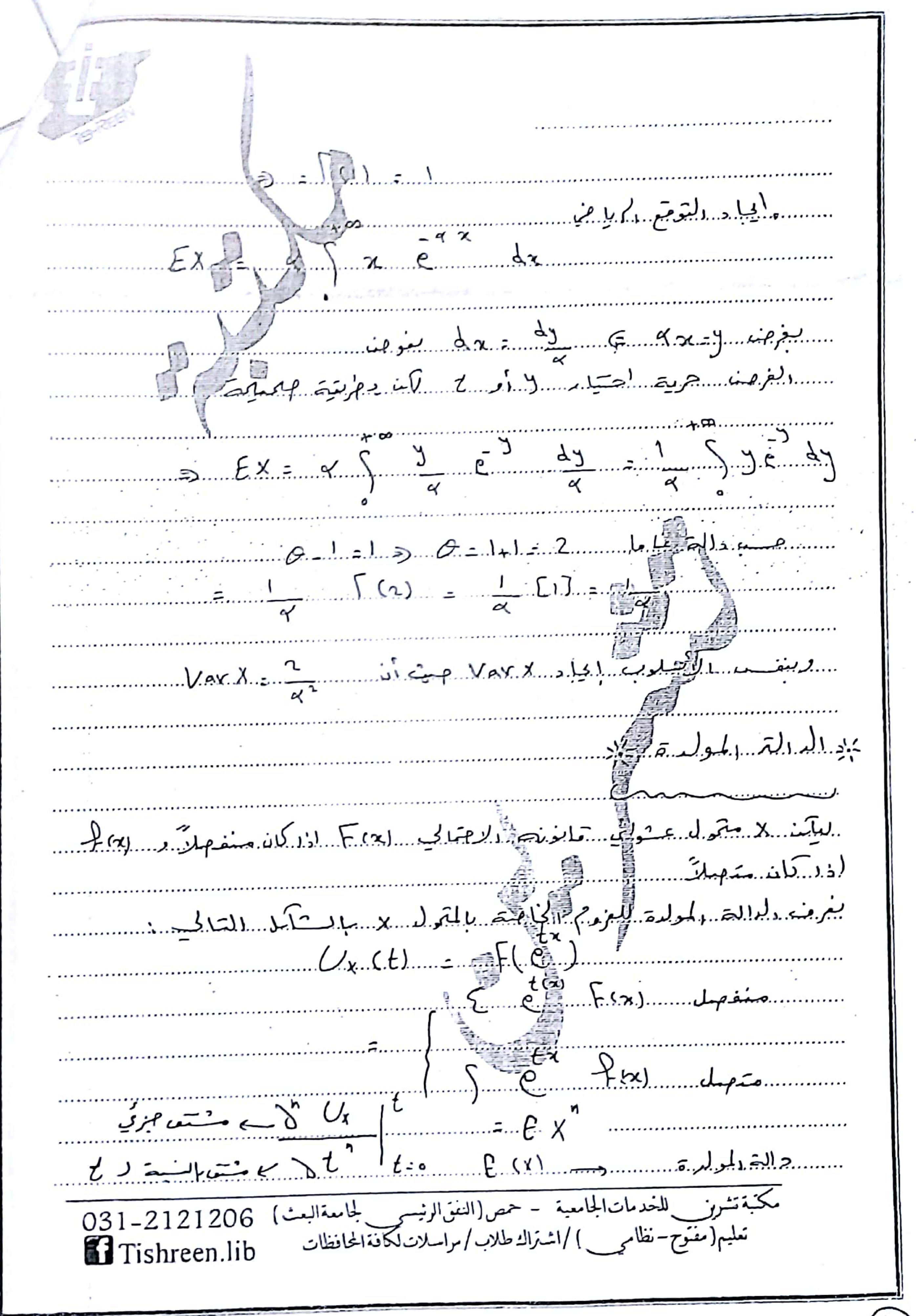
$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \alpha\, e^{-\alpha x}\,dx$$

$$= \alpha \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\,dx$$

نفرض $\alpha x = t \Leftarrow dx = \frac{dt}{\alpha}$ نعوض

$$= \alpha \int_0^{+\infty} e^{-t} \frac{dt}{\alpha} = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt$$

نلاحظ $\theta = 1 \Leftarrow \theta - 1 = 0$ حسب دالة غاما



$\Rightarrow \Gamma(1) = 1$

إيجاد التوقع الرياضي

$$EX = \alpha \int_0^{+\infty} x\, e^{-\alpha x}\, dx$$

بفرض $\alpha x = y \Leftarrow dx = \frac{dy}{\alpha}$ بعوضها

الفرض حرية اختيار y أو z لأنه دعرقية جميلة

$$\Rightarrow EX = \alpha \int_0^{+\infty} \frac{y}{\alpha}\, e^{-y}\, \frac{dy}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}\int_0^{+\infty} y\, e^{-y}\, dy$$

حسب دالة غاما $\theta - 1 = 1 \Rightarrow \theta = 1+1 = 2$

$$= \frac{1}{\alpha}\,\Gamma(2) = \frac{1}{\alpha}[1] = \frac{1}{\alpha}$$

وبنفس الأسلوب إيجاد $Var\,X$ حيث أن $Var\,X = \frac{2}{\alpha^2}$

الدالة المولدة

ليكن X متحول عشوائي قانونه الاحتمالي $F(x)$ اذا كان منفصلاً و $f(x)$ اذا كان متصلاً

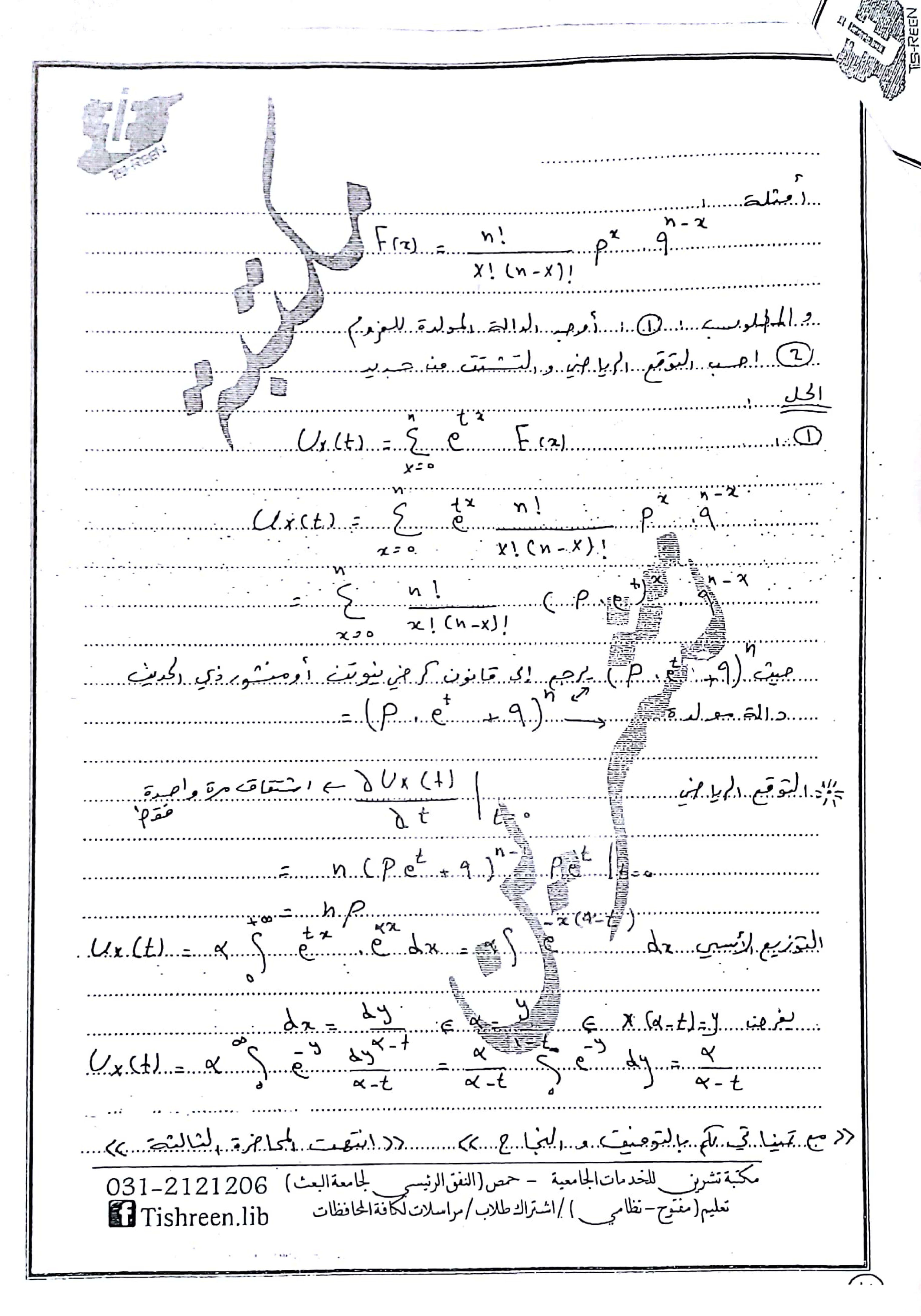
يعرف دالة المولدة للعزوم الخاصة بالمتحول X بالشكل التالي:

$$U_x(t) = E(e^{tx})$$

$$= \begin{cases} \sum e^{t(x)} F(x) & \text{منفصل} \\ \int e^{tx} f(x) & \text{متصل} \end{cases}$$

$$\frac{\partial^n U_x}{\partial t^n}\bigg|_{t=0}^{t} = E X^n$$

مشتق جزئي ← ∂^n ، مشتق بالنسبة لـ t ← ∂t^n ، $E(X)$ ⟶ دالة المولدة



أمثلة :

$$F(x) = \frac{n!}{x!\,(n-x)!}\, p^x\, q^{n-x}$$

والمطلوب : ① أوجد الدالة المولدة للعزوم

② احسب التوقع الرياضي والتشتت من جديد

الحل :

① $U_x(t) = \sum_{x=0}^{n} e^{tx} F(x)$

$$U_x(t) = \sum_{x=0}^{n} e^{tx} \frac{n!}{x!\,(n-x)!}\, p^x\, q^{n-x}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} \frac{n!}{x!\,(n-x)!} (p\,e^t)^x\, q^{n-x}$$

حيث $(p\,e^t + q)^n$ يرجع إلى قانون كرضي نيوتن أو منشور ذي الحدين

دالة معولدة ← $= (p\,e^t + q)^n$

* التوقع الرياضي : $\frac{\partial U_x(t)}{\partial t}\Big|_{t=0}$ ← اشتقاق مرة واحدة فقط

$$= n\,(p e^t + q)^{n-1}\, p e^t \Big|_{t=0}$$

$$= np$$

التوزيع الأسي : $U_x(t) = \alpha \int_0^{+\infty} e^{tx}\, e^{-\alpha x}\, dx = \alpha \int e^{-x(\alpha - t)}\, dx$

بفرض $x(\alpha - t) = y$ ← $x = \frac{y}{\alpha - t}$ ← $dx = \frac{dy}{\alpha - t}$

$$U_x(t) = \alpha \int_0^{\infty} e^{-y} \frac{dy}{\alpha - t} = \frac{\alpha}{\alpha - t} \int_0^{\infty} e^{-y}\, dy = \frac{\alpha}{\alpha - t}$$

<< مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح >> << انتهت المحاضرة الثالثة >>